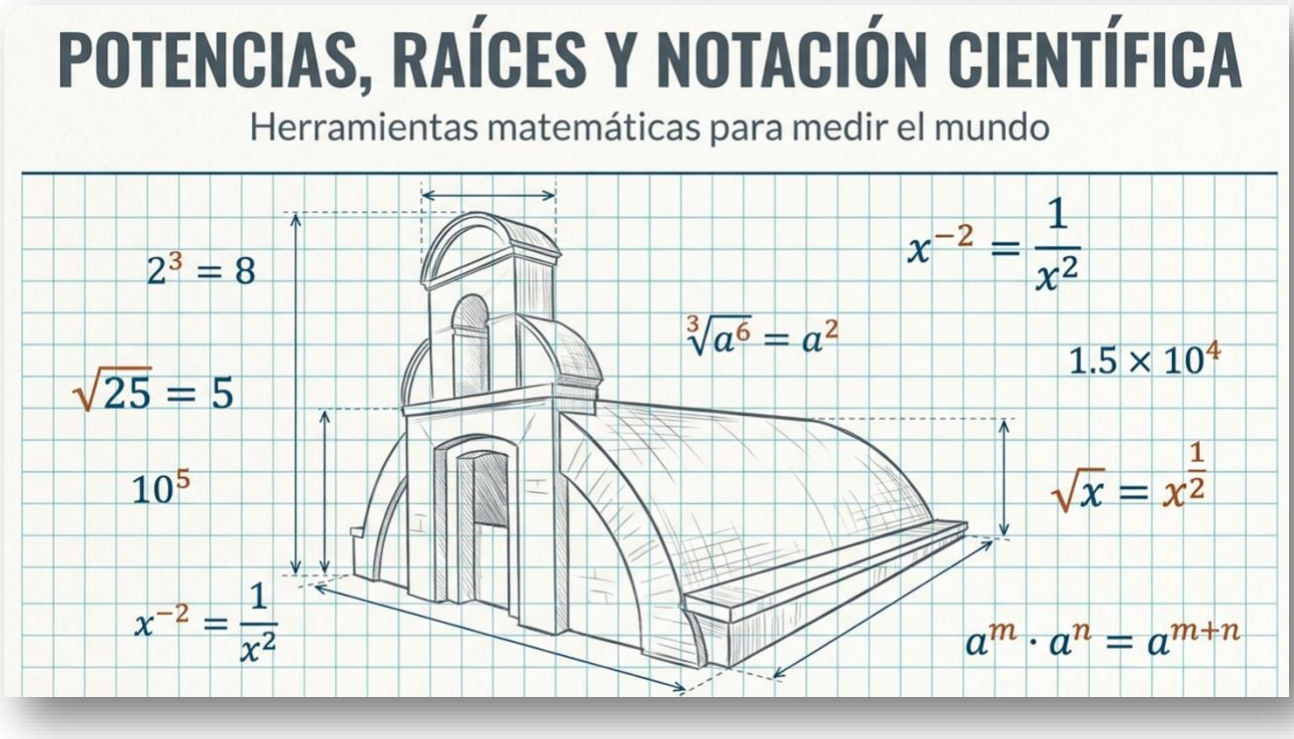
Tema 3: Potencias y Raíces

Resumen

En este tema hablaremos de:

- Potencias
- Notación científica
- Raíces cuadradas.

El objetivo principal es proporcionar una herramienta que permita comprender cómo abreviar productos de factores iguales, manejar números extremadamente grandes o pequeños y calcular raíces exactas y enteras.



1. Potencias de Exponente Entero

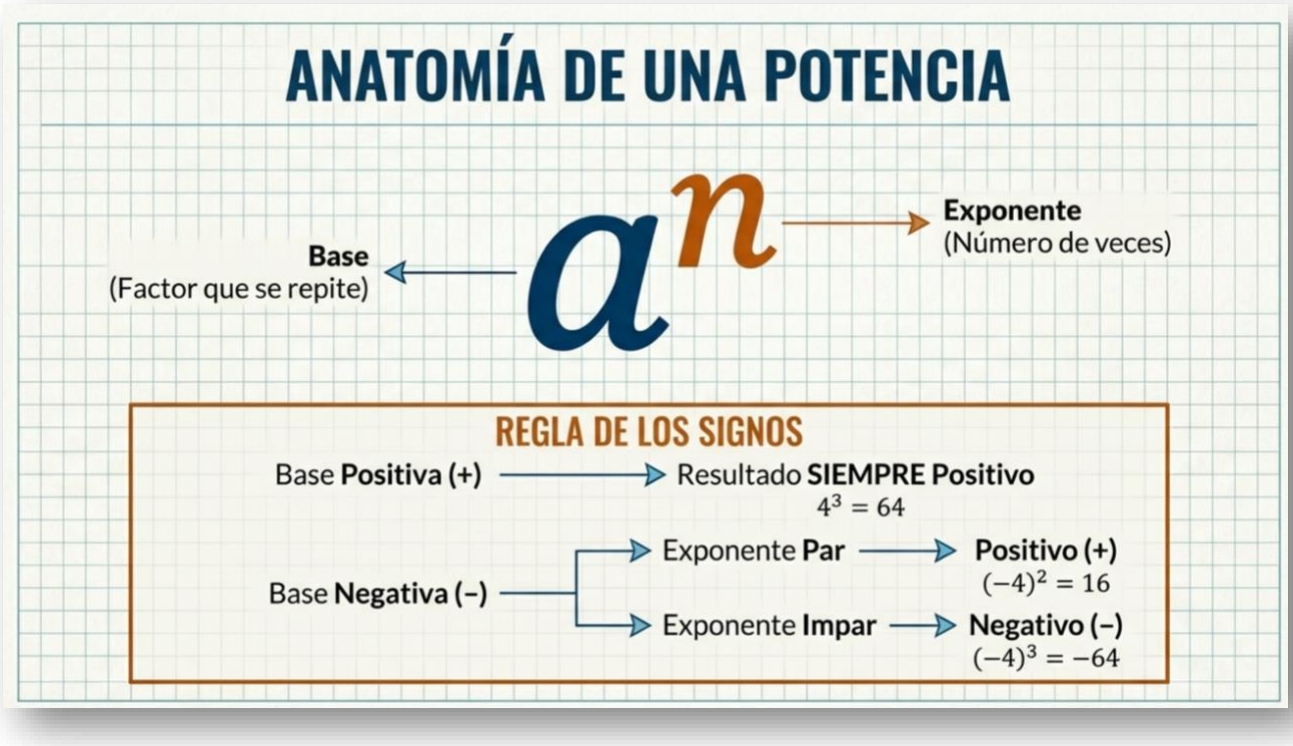
Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales.

1.1. Estructura y Definición

En la expresión a^n:

- **Base (a):** El factor que se repite.

- **Exponente (n):** El número de veces que se repite el factor.



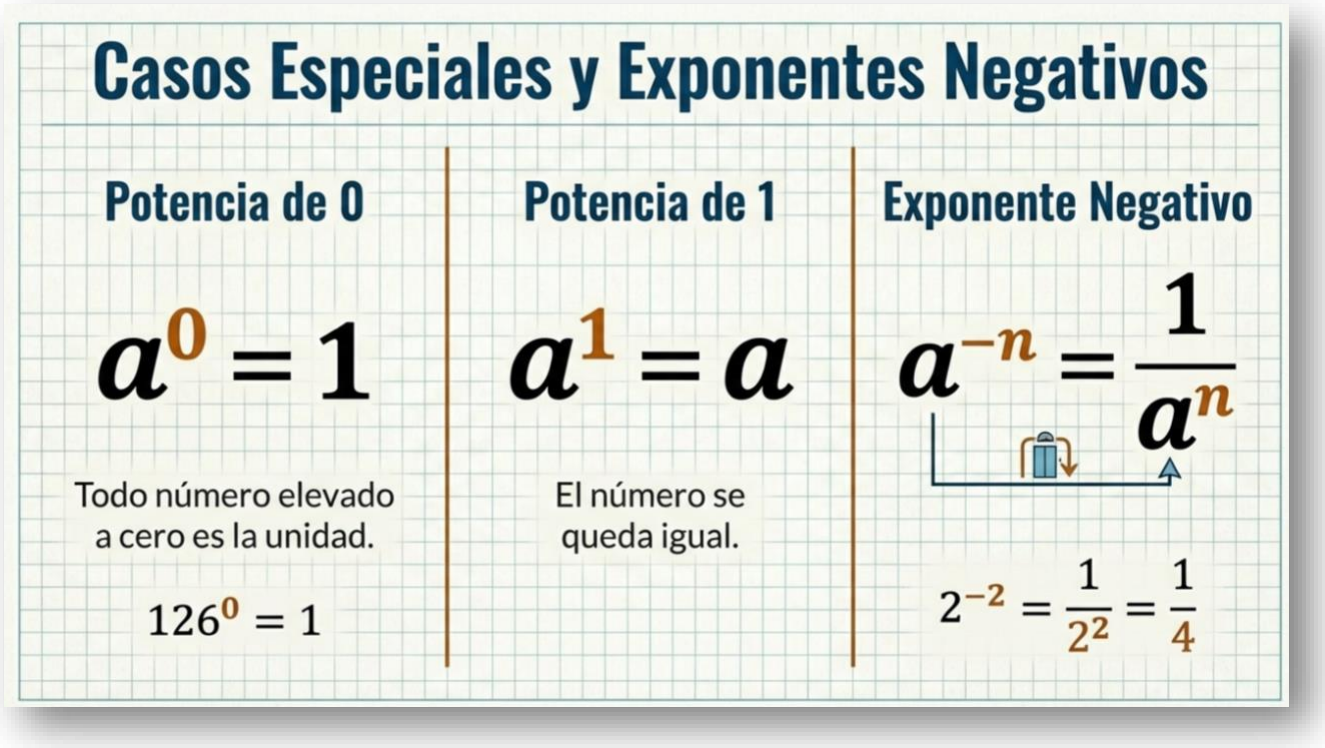
Reglas fundamentales:

- **Exponente cero:** Cualquier número distinto de 0 elevado a 0 es igual a la unidad ($a^0 = 1$).
- **Exponente uno:** Cualquier número elevado a 1 es igual a sí mismo ($a^1 = a$).
- **Exponente negativo:** Se define como la inversa de la potencia con exponente positivo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

1.2. Reglas de los Signos

Base	Exponente	Resultado	Ejemplo
Positiva	Par/Impar	Positivo	$4^4 = 256$
Negativa	Par	Positivo	$(-4)^4 = 256$
Negativa	Impar	Negativo	$(-4)^3 = -64$

Nota crítica: No es lo mismo $(-4)^0 = 1$ *que* $-4^0 = -1$.



2. Operaciones con potencias

Las operaciones se clasifican según si comparten la misma base o el mismo exponente.

2.1. Potencias de la misma base

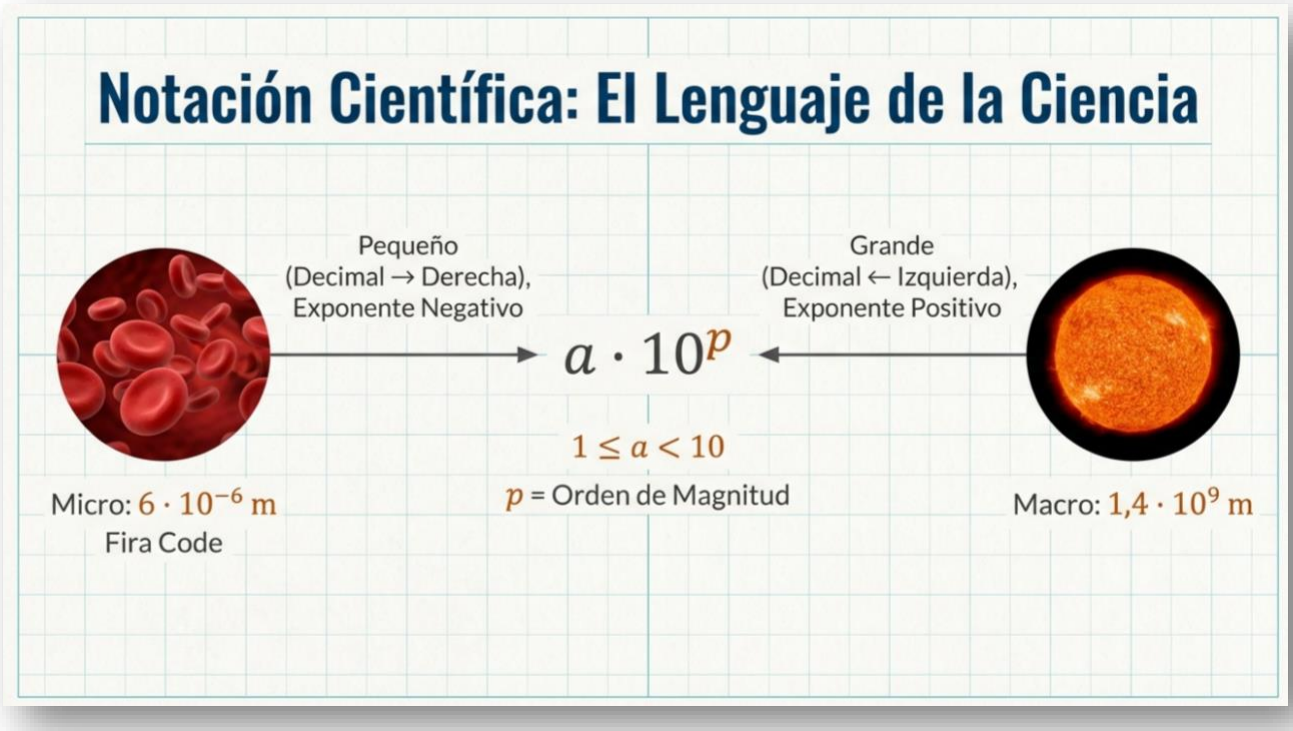
Operación	Propiedad	Ejemplo
Producto	Se suman los exponentes.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cociente	Se restan los exponentes.	$a^m : a^n = a^{m-n}$
Potencia de una potencia	Se multiplican los exponentes.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

2.2. Potencias del mismo exponente

- **Producto:** Se multiplican las bases y se mantiene el exponente: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- **Cociente:** Se dividen las bases y se mantiene el exponente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

3. Notación Científica

Se utiliza para expresar números muy grandes o muy pequeños de forma compacta mediante potencias de base 10. Un número en notación científica tiene la forma $a \cdot 10^p$, donde $1 \leq a < 10$ y p es un número entero (orden de magnitud).

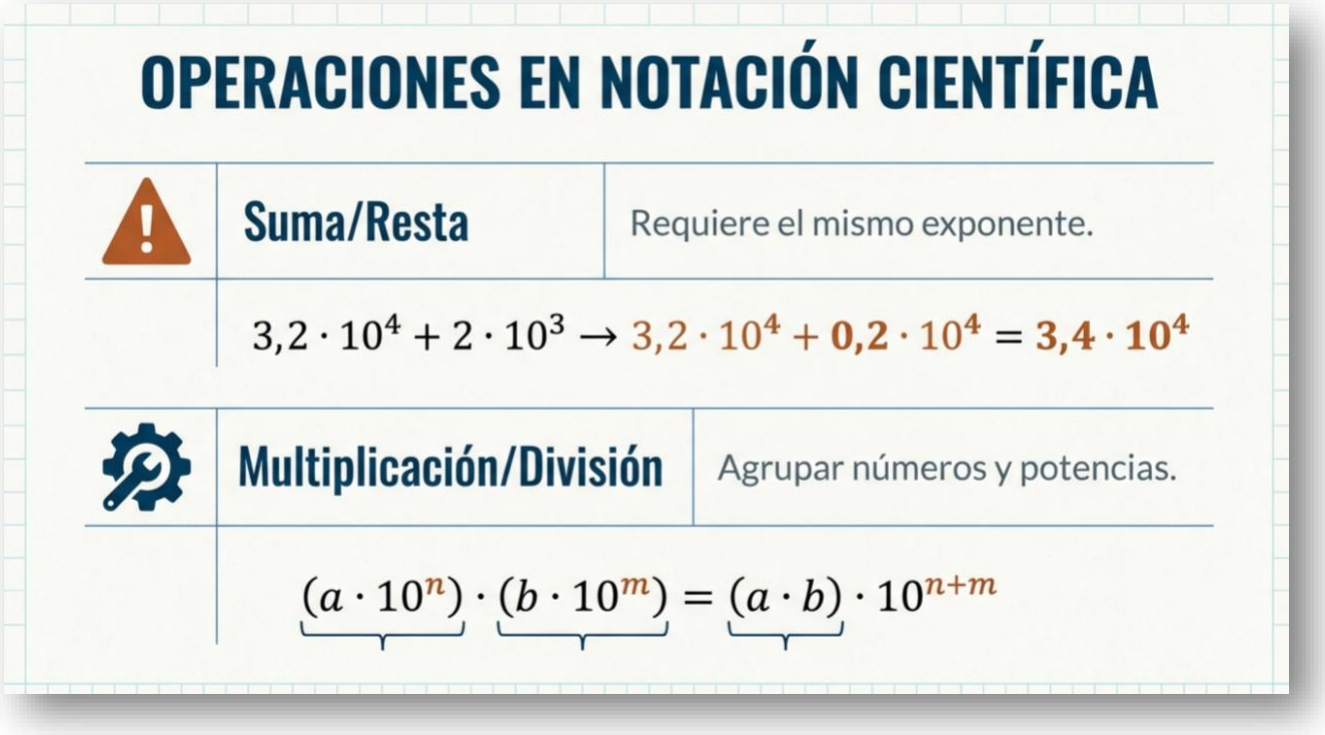


Paso a paso: conversión de decimal a notación científica

1. **Identificar las cifras significativas (a):** Colocar la coma decimal de modo que el número esté entre 1 y 10.
2. **Determinar el exponente (p):** Contar las posiciones que se ha desplazado la coma.
   - Si la coma se mueve a la **izquierda**, el exponente es **positivo**.
   - Si la coma se mueve a la **derecha**, el exponente es **negativo**.

Ejemplos:

- **Distancia del Sol:** $1.400.000.000\,m = 1{,}4 \cdot 10^9\,m$
- **Diámetro de un glóbulo rojo:** $0{,}000006\,m = 6 \cdot 10^{-6}\,m$



4. Raíz Cuadrada

4.1. Raíz exacta y cuadrados perfectos

Un número a es la raíz cuadrada exacta de b si $a^2 = b$.

- Si $b > 0$, tiene dos soluciones opuestas: $\sqrt{b} = a$ y $\sqrt{b} = -a$.
- Un número es un **cuadrado perfecto** si su raíz cuadrada es exacta (ej. 9, 16, 25).

4.2. Raíz cuadrada entera y resto

Cuando un número no es un cuadrado perfecto, se busca el mayor entero cuyo cuadrado es menor que dicho número.

- **Definición**: $\sqrt{b} \approx a$ si $a^2 < b < (a+1)^2$.
- **Resto (r):** Es la diferencia entre el número y el cuadrado de su raíz entera: $r = b - a^2$.
- **Propiedad del resto:** El resto siempre es menor que el doble de la raíz más uno ($r < 2a + 1$).

4.3. Algoritmo para calcular la raíz cuadrada (paso a paso)

Para calcular $\sqrt{58297}$:

1. **Agrupar:** Separar las cifras de dos en dos desde la derecha: $\sqrt{5|82|97}$.
2. **Primera cifra:** Buscar el mayor número cuyo cuadrado sea ≤ 5. Es 2 ($2^2 = 4$). Restar: $5 - 4 = 1$.
3. **Bajar bloque:** Bajar el siguiente par (82). Tenemos 182.
4. **Duplicar raíz:** Escribir el doble de la raíz actual ($2 \cdot 2 = 4$). Buscar una cifra x tal que $4x \cdot x \leq 182$.
   - $44 \cdot 4 = 176$. La cifra es 4. Restar: $182 - 176 = 6$.
5. **Repetir:** Bajar el siguiente par (97). Tenemos 697. Duplicar la raíz actual ($24 \cdot 2 = 48$). Buscar x tal que $48x \cdot x \leq 697$.
   - $481 \cdot 1 = 481$. La cifra es 1. Restar: $697 - 481 = 216$.
6. **Resultado:** La raíz entera es 241 y el resto es 216.

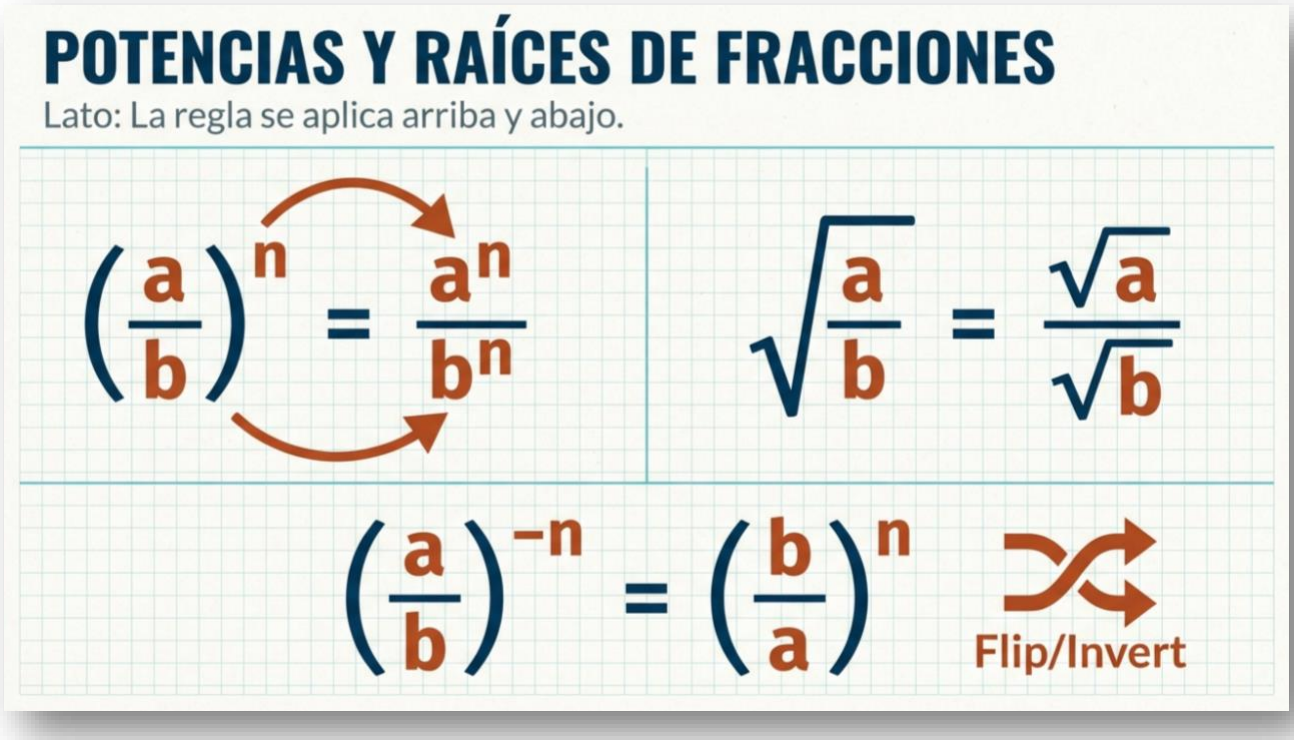
5. Potencias y Raíces de Fracciones

5.1. Potencias

- **Exponente positivo:** Se eleva el numerador y el denominador: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- **Exponente negativo:** Se invierte la fracción y se eleva a exponente positivo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

5.2. Raíz cuadrada

Se calcula la raíz del numerador y la del denominador por separado: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$



6. Jerarquía de Operaciones

En operaciones combinadas, se debe seguir este orden estricto:

1. **Paréntesis y corchetes.**
2. **Potencias y raíces.**
3. **Multiplicaciones y divisiones** (de izquierda a derecha).
4. **Sumas y restas.**

RESUMEN DE FÓRMULAS

PRODUCTO	COCIENTE	POTENCIA DE POTENCIA	EXPONENTE 0
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n : a^m = a^{n-m}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$a^0 = 1$
EXPONENTE NEGATIVO	**NOTACIÓN CIENTÍFICA**	**RAÍCES**	**FRACCIONES**
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a \cdot 10^p$	$\sqrt{b} = a \leftrightarrow a^2 = b$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$